Title	Theta lifting of cusp forms on the unitary group $U(d, d)$
Author(s)	渡部, 隆夫
Citation	数理解析研究所講究録 (1992), 805: 101-105
Issue Date	1992-08
URL	http://hdl.handle.net/2433/82929
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 805 巻 1992 年 101-105

Theta lifting of cusp forms on the unitary group $U(d,d)$

渡部 隆夫 (東北大 教養)

0. Notation

F を総実代数体とし, $E=F(\sqrt{-1})$ とする. Z^n を E 上 $2n$-次元のベクトル空間で, Witt-指数 n の skew Hermitian form $<,>_n$ をもつとする. 基底 $e_1,\cdots,e_n,f_1,\cdots,f_n$ によって $<,>_n$ は行列

$$J_n=\begin{pmatrix}0 & 1_n\\ -1_n & 0\end{pmatrix}$$

に対応するものとする. $(Z^n,<,>_n)$ に対するユニタリ群を G^n とおく. 群 $GL_q^E=\mathrm{Res}_{E/F}(GL_q)$, G^{n-q} $(1\le q\le n)$ を次の様に G^n に埋め込む.

$$\iota_n(GL_q^E)=\left\{\iota_n(A)=\begin{pmatrix}A &&&\\ & 1_{n-q} &&\\ && {}^t\overline{A}^{-1} &\\ &&& 1_{n-q}\end{pmatrix}\ \middle|\ A\in GL_q^E\right\}$$

$$\iota_n(G^{n-q})=\left\{\iota_n(g)=\begin{pmatrix}1_q &&&\\ & A && B\\ && 1_q &\\ & C && D\end{pmatrix}\ \middle|\ g=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in G^{n-q}\right\}$$

さらに次の様に G^n の部分群を定義する.

$$\begin{aligned}
Q_q^n &= \text{the stabilizer of the totally isotropic subspace} < e_1,\cdots,e_q >\\
\widetilde{M}_q^n &= \iota_n(GL_q^E)\iota_n(G^{n-q}) = \text{a Levi subgroup of } Q_q^n\\
\widetilde{U}_q^n &= \text{the unipotent radical of } Q_q^n\\
P_q^n &= Q_1^n\cap Q_2^n\cap\cdots\cap Q_q^n\\
M_q^n &= \widetilde{M}_1^n\cap\widetilde{M}_2^n\cap\cdots\cap\widetilde{M}_q^n = \text{a Levi subgroup of } P_q^n\\
U_q^n &= \text{the unipotent radical of } P_q^n\\
\Delta_q^n &= \iota_n(GL_q^E)\cap U_q^n\\
L_q^n &= \iota_n(GL_n^E)\cap\widetilde{U}_q^n\\
N_q^n &= \widetilde{U}_n^n\cap\widetilde{U}_q^n\\
V_q^n &= \text{the derived group of } U_q^n\\
W_{q-1}^n &= V_q^n\cap U_{q-1}^n
\end{aligned}$$

上で与えた群の 1 つを H とするとき, $H(F)$ を H の F-有理点のなす群とし, $H(\mathbf{A})$ をその adele 群とする. また $H(F\backslash\mathbf{A})=H(F)\backslash H(\mathbf{A})$ とおく. $U_n^n(\mathbf{A})$ の元 u を

$$u=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & {}^t\overline{A}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1_n & B\\ 0 & 1_n\end{pmatrix},\quad A=(a_{ij})\in GL_n(\mathbf{A}_E),\quad B={}^t\overline{B}=(b_{ij})\in M_n(\mathbf{A}_E)$$

と表示したときに

$$\widehat{u}_{i,j}^{n,-}(u) = a_{ij}\,, \qquad \widehat{u}_{i,j}^{n,+}(u) = b_{ij} \quad \text{for } 1 \le i < j \le n$$
$$\widehat{u}_{i}^{n,+}(u) = b_{ii}\,, \qquad \text{for } 1 \le i \le n$$

とする. 最後に $G^n(\mathbf{A})$ 上の保型形式のなす空間を $\mathcal{A}(G^n)$ とかき, cusp form のなす空間を $\mathcal{A}_0(G^n)$ とかく. $F\backslash\mathbf{A}$ 上の自明でない character μ を 1 つ固定しておく.

1. A filtration of $\mathcal{A}(G^n)$

まず保型形式の Fourier 展開を与える.

$$\widehat{U}_q^n = \mathrm{Hom}(V_q^n\backslash U_q^n(F\backslash\mathbf{A}), \mathbf{C}^*)\,, \quad \widehat{\Delta}_q^n = \mathrm{Hom}((\Delta_q^n \cap V_q^n)\backslash\Delta_q^n(F\backslash\mathbf{A}), \mathbf{C}^*)$$
$$Z_q^n = < e_{q+1}, \cdots, e_n > + < f_{q+1}, \cdots, f_n >$$

とおく. $\Delta_q^n \cong \widetilde{U}_q^n\backslash U_q^n$ だから $\chi \in \widehat{\Delta}_q^n$ は自然に $\widehat{U}_q^n$ の元とみなせる. いま $\chi \in \widehat{\Delta}_q^n$, $z \in Z_q^n$, $u \in U_q^n(\mathbf{A})$ に対して

$$\chi^*(z)(u) = \chi(u)\mu(\mathrm{tr}_{E/F}(\sum_{i=q+1}^{n} < z, f_i >_n \widehat{u}_{q,i}^{n,-}(u) - < z, e_i >_n \widehat{u}_{q,i}^{n,+}(u)))$$

と定義する. このとき $\chi^*(z) \in \widehat{U}_q^n$ であり

$$\widehat{U}_q^n = \bigsqcup_{\chi\in\widehat{\Delta}_q^n} \chi^*(Z_q^n)\,, \quad \{\psi \in \widehat{U}_q^n \mid \psi|_{W_q^n(\mathbf{A})} \equiv 1\} = \bigsqcup_{\chi\in\widehat{\Delta}_q^n} \chi^*(< e_{q+1} >)$$

をもつ. そこで $\varphi \in \mathcal{A}(G^n)$, $\psi \in \widehat{U}_q^n$, $\alpha \in F$ に対して

$$\lambda_q^n(g;\psi;\varphi) = \int_{U_q^n(F\backslash\mathbf{A})} \psi^{-1}(u)\varphi(ug)du$$
$$\xi_q^n(g;\psi,\alpha;\varphi) = \int_{V_{q+1}^n(F\backslash\mathbf{A})} \mu^{-1}(\alpha\widehat{u}_{q+1}^{n,+}(v)) \left\{ \int_{W_q^n(F\backslash\mathbf{A})} \lambda_q^n(vwg;\psi;\varphi)dw \right\} dv$$

と定義する. ただし, $q = n-1$ のときに限り $\xi_{n-1}^n(g;\psi,\alpha;\varphi)$ の定義に現われる $V_{n-1}^n(F\backslash\mathbf{A})$ 上の積分は $V_{n-1}^n U_n^+(F\backslash\mathbf{A})$ 上の積分で置き換えるものとする. ここで U_n^+ は成分 $u_n^{n,+}(\cdot)$ に対応する one parameter subgroup とする. $1 \le q \le n-1$ のとき, 次の Fourier 展開をもつ.

$$\int_{V_q^n(F\backslash\mathbf{A})} \varphi(vg)dv = \sum_{\chi\in\widehat{\Delta}_q^n} \sum_{z\in Z_q^n} \lambda_q^n(g;\chi^*(z);\varphi)$$
$$\int_{W_q^n(F\backslash\mathbf{A})} \varphi(wg)dw = \sum_{\chi\in\widehat{\Delta}_q^n} \sum_{\substack{z\in< e_{q+1}> \\ \alpha\in F}} \xi_q^n(g;\chi^*(z),\alpha;\varphi)$$

$\widehat{\Delta}_q^n$ の元 χ は各 $u_{j,j+1}^{n,-}(\cdot)$ $(1 \leq j \leq q-1)$ に対応する one parameter subgroup 上 trivial でなければ非退化とよばれる. 非退化な character 全体の集合を $\widehat{\Delta}_q^n[0]$ とおく. このとき上で与えた Fourier 展開の部分和を次の様にとる.

$$\Lambda_q^n(\varphi)(g) = \sum_{\chi \in \widehat{\Delta}_q^n[0]} \sum_{z \in Z_q^n} \lambda_q^n(g; \chi^*(z); \varphi)$$

$$\Lambda_{q+\frac{1}{2}}^n(\varphi)(g) = \sum_{\chi \in \widehat{\Delta}_q^n[0]} \sum_{\substack{z \in < e_{q+1} > \\ \alpha \in F}} \xi_q^n(g; \chi^*(z), \alpha; \varphi)$$

これを用いて $\mathcal{A}(G^n)$ の不変部分空間を次で定義する: 半整数 r に対して

$$\mathcal{A}^r(G^n) = \begin{cases} \mathcal{A}(G^n) & \text{if } n \leq r \\ \{\varphi(g) \in \mathcal{A}(G^n) \mid \Lambda_r^n(\varphi)(g) \equiv 0\} & \text{if } 1 \leq r \leq n - \frac{1}{2} \\ \{0\} & \text{if } r \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

これは filtration

$$\{0\} \subset \mathcal{A}^1(G^n) \subset \mathcal{A}^{\frac{3}{2}}(G^n) \subset \cdots \subset \mathcal{A}^{n-\frac{1}{2}}(G^n) \subset \mathcal{A}(G^n)$$

を与える. また

$$\mathcal{A}_0^r(G^n) = \mathcal{A}_0(G^n) \cap \mathcal{A}^r(G^n)$$

とおく.

例: π を $G^n(\mathbf{A})$ の既約保型表現とするとき

(1) π が cuspidal holomorphic $\Longrightarrow$ $\pi \hookrightarrow \mathcal{A}_0^{3/2}(G^n)$

(2) π が generic $\Longrightarrow$ $\pi \hookrightarrow \mathcal{A}^n(G^n)/\mathcal{A}^{n-1/2}(G^n)$

(3) π が Weil 表現 $\Longrightarrow$ $\pi \hookrightarrow \mathcal{A}^2(G^n)$ で, この場合次は同値になる.

$$\pi \text{ が cuspidal} \iff \pi \hookrightarrow \mathcal{A}^{3/2}(G^n) \iff \pi \hookrightarrow \mathcal{A}^1(G^n)$$

2. Theta lifting

整数 $d \geq 1$ を固定する. Hermitian space $(Z^d \otimes Z^n, <,>= \sqrt{-1} <,>_d \otimes <,>_n)$ を考えることにより, 自然な写像

$$G^d \times G^n \to G^{2dn} \to Sp_{8dn} = Sp(Z^d \otimes Z^n, \mathrm{tr}_{E/F}(<,>))$$

をえる. $Mp_{8dn}(\mathbf{A})$ を $Sp_{8dn}(\mathbf{A})$ 上の metaplectic 群とし, ω_μ を μ に対応する $Mp_{8dn}(\mathbf{A})$ の Weil 表現とする. いま $E^* \backslash \mathbf{A}_E^*$ 上の character ν で, その A^* への制限が類体論から従う 2 次拡大 E/F に対応する character であるようなものを 1 つ固定する. このとき Gelbart - Rogawski ([1]) により, splitting $s_{\mu,\nu}: G^{2dn}(\mathbf{A}) \to Mp_{8dn}(\mathbf{A})$ が構成できる. これから $G^{2dn}(\mathbf{A})$ の Weil 表現 $\omega = \omega_\mu \circ s_{\mu,\nu}$ をえる. ω は $\mathcal{Y}^n(\mathbf{A}) = Z^d(\mathbf{A})^{\oplus n}$ 上の Schwarz - Bruhat 空間 $\mathcal{S}(\mathcal{Y}^n(\mathbf{A}))$ に実現される. $f \in \mathcal{S}(\mathcal{Y}^n(\mathbf{A}))$, $h \in G^d(\mathbf{A})$, $g \in G^n(\mathbf{A})$ に対して

$$\theta_f^{d,n}(h,g) = \sum_{\vec{x} \in \mathcal{Y}^n} \omega(h \cdot g) f(\vec{x})$$

とおく．各 cusp form $\varphi \in \mathcal{A}_0(G^d)$ に対し

$$\theta^n(\varphi|f)(g) = \int_{G^d(F\backslash \mathbf{A})} \varphi(h)\theta_f^{d,n}(h,g)dh$$

とすれば，これは $G^n(\mathbf{A})$ 上の保型形式を与える．$G^d(\mathbf{A})$ の既約 cuspidal 表現 π に対し

$$\Theta^n(\pi) = \{\theta^n(\varphi|f) \mid \varphi \in \pi,\ \ f \in \mathcal{S}(\mathcal{Y}^n(\mathbf{A}))\}$$

とおき，これを π の theta lifting とよぶ．

3. Fourier coefficients of $\theta^n(\varphi|f)$

以下では，$\theta^n(\varphi|f)$ の §1 で述べた Fourier 係数をもとめる．$\varphi \in \mathcal{A}_0(G^d)$, $f \in \mathcal{S}(\mathcal{Y}^n(\mathbf{A}))$, $1 \le q \le n-1$ は固定しておく．また $\mathcal{Y}^n(\mathbf{A})$ の元 $\vec{x}$ は，しばしば，$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $x_i \in Z^d(\mathbf{A})$ の形にかかれる．とくに $1 \le q \le d$ のとき

$$\begin{aligned} {}^*\vec{e}_q &= (e_1, \cdots, e_q, 0, \cdots, 0) \\ \vec{e}_{n-q}(z) &= (0, \cdots, 0, -\sqrt{-1} < z, e_{q+1} >_n f_q, \cdots, -\sqrt{-1} < z, e_n >_n f_q)\ , \quad (z \in Z_q^n) \end{aligned}$$

とする．またこのとき

$$\mathcal{Y}_q^{n-q} = \{(0, \cdots, 0, x_{q+1}, \cdots, x_n) \in \mathcal{Y}^n \mid x_i \in Z_q^d,\ \ q+1 \le i \le n\}$$

とする．

THEOREM 1. 任意の $\chi \in \widehat{\Delta}_q^n[0]$ と $z \in Z_q^n$ について次をもつ．

(1) $q > d$ のとき

$$\lambda_q^n(g; \chi^*(z); \theta^n(\varphi|f)) = 0$$

(2) $1 \le q \le d$ のとき

$$\begin{aligned} \lambda_q^n(g; \chi^*(z); \theta^n(\varphi|f)) = &\int_{U_q^d(\mathbf{A})\iota_d(G^{d-q})(F)\backslash G^d(\mathbf{A})} \int_{(\Delta_q^d V_q^d \backslash U_q^d)(F\backslash \mathbf{A})} \sum_{\vec{y}_{n-q} \in \mathcal{Y}_q^{n-q}} \\ &\times \xi_{q-1}^d(uh; \widetilde{\chi}, \sqrt{-1} < z, z >_n; \varphi)\xi_q^n(uh; \chi^*(z); \omega(g)f)(\vec{y}_{n-q})dudh \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} &\xi_q^n(h; \chi^*(z); f)(\vec{y}_{n-q}) \\ &= \int_{\Delta_q^n(\mathbf{A})} \chi^{-1}(\delta) \int_{L_q^n(\mathbf{A})} \chi^*(z)^{-1}(u)\omega(h \cdot \delta u) f({}^*\vec{e}_q + \vec{e}_{n-q}(z) + \vec{y}_{n-q})dud\delta \end{aligned}$$

で，また $\widetilde{\chi}(\delta) = \chi(\overline{\delta})$ とする．

この公式を導く過程で $\Theta^n(\pi)$ の cuspidality に関する条件がえられる．

THEOREM 2. $G^d(\mathbf{A})$ の既約 *cuspidal* 表現 π について，$\Theta^n(\pi)$ が *cuspidal* であるための必要十分条件は $\Theta^{n-1}(\pi \otimes \nu \circ \det) = 0$ となることである．また $\Theta^1(\pi)$ はいつでも *cuspidal* 表現になる．

(講演，および以前の preprint のなかで上の定理の ν が ν^{-1} となっていますが，これは misprint でした．申し訳ありません．)

上の 2 つの結果から次が従う．

THEOREM 3. π を既約 *generic non-zero cuspidal* 表現とするとき, $\Theta^n(\pi)$ は $n \geq d+1$ で *non-zero* で. $n \geq d+2$ で *cuspidal* にはならない.

ここで Theta lifting の non-vanishing については, Rallis の論法により, 任意の既約 non-zero cuspidal 表現 π に対して, $\Theta^{2d}(\pi)$ は non-zero であることが知られる. 上の定理は π が generic ならば "$2d$" を "$d+1$" でおきかえてよいということを示している. また Theorem 1 から直接に次が導かれる.

THEOREM 4. r を半整数とする. このとき $\varphi \in \mathcal{A}_0^r(G^d)$ ならば, 任意の $f \in \mathcal{S}(\mathcal{Y}^n(\mathbf{A}))$ について $\theta^n(\varphi|f) \in \mathcal{A}^{r+1/2}(G^n)$ である.

これから $n > d$ のとき $G^d(\mathbf{A})$ からの theta lifting でえられる $G^n(\mathbf{A})$ の保型表現は generic にはならないことがわかる.

REFERENCES

1. S. S. Gelbart and J. D. Rogawski, *L-functions and Fourier-Jacobi coefficients for the unitary group* $U(3)$, Invent. Math. **105** (1991), 445 - 472.
2. S. Rallis, *On the Howe duality conjecture*, Compositio Math. **51** (1984), 333 - 399.
3. T. Watanabe, *Theta lifting of cusp forms on the unitary group* $U(d,d)$, preprint.